

解説

音響学における相反定理とその応用*

鈴木英男 (千葉工業大学情報科学部情報ネットワーク学科)**

43.38.Ar,Kb

1. はじめに

相反定理あるいは相反性という、自分には縁のない別の分野の専門用語と受け取る読者が多いと思われるが、意外と身近に存在しているものなのである。音響研究に欠かせないマイクロホンの感度校正は、相反定理に基づいた相互校正法により行われている。この方法なしに音響計測工学は存在し得ないと言っても過言ではない。日本では、産業技術総合研究所においてこの方法を用いて基準となるマイクロホンの絶対感度の校正を行っている。相反性を用いると、スピーカとしての指向性とマイクロホンとしての指向性が同じである、という性質も導かれる。アクティブ制御による騒音低減の効果を、二つの音源間の相互放射インピーダンスが等しいという性質(相反性)を用いて定量的に検討することもできる。

自動車の騒音を評価する際に、走行時に車体の側方 7.5 m、高さ 1.5 m における騒音レベルが規制の対象となる。そのために、車体の各部分の振動がどの程度観測点の音圧に寄与するかが騒音低減のための貴重な情報となる。例えばエンジンの一部分だけを振動させることは不可能なので、その近くに音源(スピーカ)を置いて、7.5 m での音圧を測定し、周波数応答関数(音圧/体積速度)を求めることになる。しかし、スピーカを十分小さくできないので、相反性を仮定して受信側にスピーカ、音源側にマイクロホンを置いて周波数応答関数を求めることが行われている。

もう一つの身近な応用例は、実験モード解析である。実験モード解析とは構造物の各点の相対的

な動きを測定し、実験的に共振周波数、ダンピング、振動姿態などを求める方法である。測定点が 200 程度になるのはごく普通で、各点間の周波数応答関数(振動速度/加振力)を全部求めるには 1 次元の振動のみを扱う場合でさえ 40,000 個必要になる。それが、相反性を仮定することにより 200 個のままで済む。

以上のように、相反定理は結構身近に存在し使われているものである。相反性が読者にとって身近なものと同感できるよう、以下説明を試みることにする。なお、電気、機械・音響系全体に関する相反性については、文献[1,2]で詳しく述べられているので、更に進んだ理解を求める読者には、それらを参照されることをお勧めしたい。

2. 相反定理 (reciprocity principle) の定義

相反性は英語で“reciprocity”と言われる。“reciprocal”の意味は「相互に反応する」という意味があるので、相反性は「相(あい)反する性質」ではなく、「相互に反応する性質」というように解釈すべきものであろう。

相反性については、線形性を有する電気の 4 端子回路を例にとると分かり易い。図-1 の回路の入出力系を次のように表す。

$$\begin{aligned} E_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ E_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (1)$$

例えば、 Z_{11} は端子 2 側を開放($I_2=0$)したときの、端子 1 側の電圧(E_1)の電流(I_1)に対する比である。また、 Z_{21} は同じ条件での、端子 2 側の出力電圧(E_2)の端子 1 側の入力電流(I_1)に対する比である。

相反性とは 4 端子網を式(1)のようにインピーダンスマトリックス $[Z]$ で表したときに、

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (2)$$

が成立することである[3]。式(2)は、「1-1'側

* Reciprocity theorem and its applications in acoustics.

** Hideo Suzuki (Department of Information and Network Science, Chiba Institute of Technology, Narashino, 275-0016)

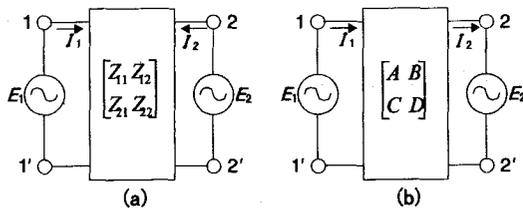


図-1 4 端子電気回路
a: インピーダンス表現, b: 4 端子定数表現

から電流を流し、2-2' を端子開放したときの電圧と入力電流との比が、2-2' に電流を流し、1-1' を端子開放したときに現れる電圧と入力電流との比と同じである」ことを表している。

図-1(b)のように電流の向きを逆にとり、4 端子回路網を四端子定数と呼ぶマトリックスで表す方法もある[4]。

$$\begin{aligned} E_1 &= AE_2 + BI_2 \\ I_1 &= CE_2 + DI_2 \end{aligned} \quad (3)$$

I_2 の向きの違いを考慮して式(3)を式(1)の形に書き換えて比較すると、

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A/C & (AD-BC)/C \\ 1/C & D/C \end{bmatrix} \quad (4)$$

の関係が得られる。四端子定数の場合の相反性の表現はその行列式が1となることである。

$$AD - BC = 1 \quad (5)$$

4 端子定数のこの性質は回路を縦続接続したときの相反性の評価に利用できる。通常のインダクタンス、キャパシタンス、及び抵抗からなる受動回路では相反定理が成り立つことが知られている。

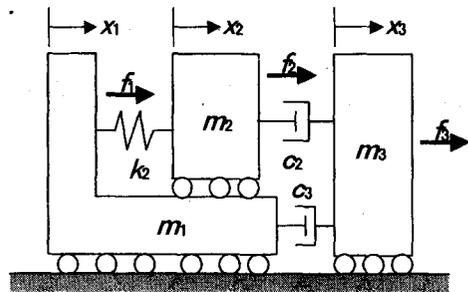


図-2 質量, ばね, 粘性抵抗からなる機械系

3. 振動系の相反性

質量, ダッシュポット, ばねの3要素からなる図-2の振動系を考える。 f_i は i 番目の質量に作用する力, x_i は i 番目の質量の変位である。それぞれの質量について運動方程式を立てると次のようになる[5]。

$$\begin{aligned} f_1 &= m_1(d^2x_1/dt^2) + c_3d(x_1-x_3)/dt \\ &\quad + k_2(x_1-x_2) \\ &= [m_1(d^2/dt^2) + c_3(d/dt) + k_2]x_1 \\ &\quad - k_2x_2 - c_3(d/dt)x_3 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= m_2(d^2x_2/dt^2) + c_2d(x_2-x_3)/dt \\ &\quad + k_2(x_2-x_1) \\ &= -k_2x_1 + [m_2(d^2/dt^2) + c_2(d/dt) \\ &\quad + k_2]x_2 - c_2(d/dt)x_3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= m_3(d^2x_3/dt^2) + c_2d(x_3-x_2)/dt \\ &\quad + c_3d(x_3-x_1)/dt \\ &= -c_3(d/dt)x_1 - c_2(d/dt)x_2 \\ &\quad + [m_3(d^2/dt^2) + (c_2+c_3)(d/dt)]x_3 \end{aligned} \quad (8)$$

角周波数 ω の単一周波数の振動を仮定し、

$dx_i/dt = v_i$, $d/dt = j\omega$, $\int dt = 1/j\omega$ を用いてマトリックスの形に書き直すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} [j\omega m_1 + c_3 + k_2/j\omega] & -k_2/j\omega & -c_3 \\ -k_2/j\omega & [j\omega m_2 + c_2 + k_2/j\omega] & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & [j\omega m_3 + (c_2 + c_3)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 V_i 及び F_i はそれぞれ各質量の速度及びそれに働く外力の複素振幅である。左辺のインピーダンスマトリックスは対称 ($Z_{ij} = Z_{ji}$) であり、その逆行列であるアドミタンスマトリックス $[Y]$ も対称行列となる。

$$[Y]\{F\} = \{V\} \quad (10)$$

すなわち、 i 点にある大きさの力を加えたときの j 点の速度は、 j 点に同じ大きさの力を加えたときの i 点の速度に等しいということである。相反性 $Z_{ij} = Z_{ji}$ が成り立つことは、 i 番目の質量と j 番目の質量をつなぐダッシュポット及びばねに関して、 i 番目と j 番目の式の中でそれぞれ、 $Z(V_i$

$-V_i$) 及び $Z(V_j - V_i)$ (Z は c 又は $1/j\omega$) という形に入るから、式(9)の形で表現すると $Z_{ij} = Z_{ji}$ となる。分布定数からなる連続体の場合も、上述の集中定数からなる3要素の合成として表現できることを考えると、線形の構造系であれば相反性は広く成立すると考えることができる。

4. 音響系の相反性

自由空間内に体積速度 U の点音源があるとき、距離 r 離れた位置での音圧は次式で与えられる。

$$P = \frac{j\rho ck}{4\pi r} U e^{-jkr} \quad (11)$$

ρ は空気密度、 c は音速、 k は波数である。この最も単純な例では、音源と受音点との関係は距離 r だけに依存するので、場所を入れ替えても当然成り立つ。

任意の音場中の x_s に点音源があるときの、 x の音圧は

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(x|x_s) = -4\pi\delta(x-x_s) \quad (12)$$

を満たすグリーン関数で与えられ、グリーン関数は

$$G_k(x|x_s) = G_k(x_s|x) \quad (13)$$

を満たすことで、相反性が成り立つとされる (x_s : 音源位置, x : 受音位置) [2,5]。

もう少しなじみやすい説明は文献[6]に述べられている。任意の閉空間が S_1, S_2, S_3, \dots という面を有し、それらが異なる二つの速度分布 v' 及び v'' を有し、音圧分布 p' 及び p'' を生じるものとする、

$$\iint_{(S_1, S_2, \dots)} (p''v' - p'v'') ds = 0 \quad (14)$$

が成立すると言われる。 S_1 を V_1 でピストン振動するスピーカとしての平板の面積とし、 S_2 を V_2 で呼吸振動する波長より十分小さい微小球の表面積とする。 v' の速度分布では S_1 だけが振動しそのときの S_2 上の音圧を P_{12} 、 v'' の速度分布では S_2 だけが振動し、そのときの S_1 上の音圧を P_{21} とする。更に、

$$\iint_{S_1} P_{21} ds = F_{21} \quad (\text{微小音源によりピストンに加わる力}) \quad (15)$$

$$\iint_{S_2} V_2 ds = U_2 \quad (\text{点音源の体積速度}) \quad (16)$$

とおくと、

$$F_{21}/U_2 = P_{12}/V_1 \quad (17)$$

が成り立つ。式(17)の左辺はピストンがマイクロホンとして動作するときの受波特性であり、右辺はスピーカとしての送波特性である。微小球音源の体積速度と、それによってピストン振動板に発生する力の比は、ピストン振動板の振動速度と、それによって微小球の位置に発生する音圧の比と等しいことを示している。微小音源の位置に関係なく式(17)が成立するので、ある送波指向特性を有しているピストン振動板は、同じ受波指向特性を有する、ということが言える。

相反性はどのような音場でも成り立つのであろうか。これに関しては、音場の境界が“locally reactive”な場合は成立するが、ある種のモデルで表現されるような多孔質吸音面があるときには相反性が成立しない、という研究成果があることが述べられている[5]。

5. 電気音響変換器の相反性

電気音響変換器の相反性については、文献[1,2]で詳しく述べられている。そこでは、相反性を可逆性と呼んでいる。また、式(2)に対して、

$$Z_{12} = -Z_{21} \quad (18)$$

が成り立つ系の性質を反可逆性と呼んでいる[1]。この性質を持つ系はジャイレータと呼ばれることもある[3]。

まず、動電型変換器の場合について述べる。電気端子に加える電圧、電流と振動面に加わる力 (F) 及び速度 (V) の関係は、次式で与えられる[1,2]。

$$\begin{aligned} E &= Z_e I + A V \\ F &= -A I + Z_m V \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 Z_e は入力電気抵抗、 Z_m は機械抵抗、 A は力係数と呼ばれる定数である。式(2)及び(18)と比較すると、後者に対応する形をしている。こ

表-1 インピーダンスアナロジーとモビリティアナロジー

| 機械系 | 電気系 | |
|------------|-------------------|------------|
| | インピーダンスアナロジー | モビリティアナロジー |
| 力 (F) | 電圧 (E) | I |
| 速度 (V) | 電流 (I) | E |
| 質量 (m) | インダクタンス (L) | C |
| ばね (k) | キャパシタンス ($1/C$) | $1/L$ |
| 抵抗 (c) | 抵抗 (R) | $1/R$ |

ここで、電気音響変換器の相反性を議論するときには注意しなければならないのは、入力と出力の物理量が異なることである。表-1はインピーダンスアナロジーとモビリティアナロジーのときの機械系と電気系の対応の仕方を示したものであり、どちらの対応を用いることも可能である。式(19)をモビリティアナロジーを用いて書き直すと、

$$E = (Z_e + A^2/Z_m)I + (A/Z_m)F$$

$$V = (A/Z_m)I + (1/Z_m)F \quad (20)$$

となる。この形は式(2)に対応する。このように、異なる物理系を入出力に持つ変換器は物理量の対応の仕方により、見方が変わるという点が重要である[7]。文献[5]では

$$|Z_{12}| = |Z_{21}| \quad (21)$$

が成り立つ電気音響変換器を符号の区別をせずに“reciprocal transducer”と呼んでいる。静電型の変換器の場合は、電磁型の場合と逆で、インピーダンスアナロジーのとき、可逆性、モビリティアナロジーのとき反可逆性と見なすことができる。文献[5]に従えば、どちらの場合も、“reciprocal transducer”である。同種の変換機を縦続接続すると可逆性を満たし、異種同士を縦続接続すると反可逆性となることも知られる[1,7]。

文献[1]では、電気音響変換器そのものについては可逆性の議論はせず、変換器を組み合わせた電気の入出力系の場合についてのみ可逆性(式(2)), 反可逆性(式(18))の呼び方を適用している。文献[2]では、異なる物理系に対しても符号の違いを含めて可逆性と呼んでいるが、対応の仕方(表-1)で符号が変わることには言及していない。文献[1,2]では、電磁型と静電型の変換器が混在する電気音響変換系については、「非」可逆性になる場合があることも述べている。

6. 相互校正法

マイクロホンの精密な感度校正には相互校正法が用いられる。ここでは自由音場における相互校正法を例にとって説明することとする。動電型変換器の式を体積速度 U と音圧 P を用いて書き直すと、次のようになる。

$$E = Z_e I + (A/S)U$$

$$P = -(A/S)I + (Z_m/S^2)U \quad (22)$$

これらの入出力量についても相反性が成り立つ。

マイクロホンとしての感度は、音響端子に音圧 P が加わったときの開放電気端子に生じる電圧 E を用いて定義できる。一方、電気端子に入力電流 I を加え、音響端子に加わる外部音圧をゼロとしたときの体積速度 U を用いると、相反性から

$$M = \left. \frac{E}{P} \right|_{I=0} = \left. \frac{U}{I} \right|_{P=0} \quad (23)$$

である。電気音響変換器が十分小さいとすると、体積速度 U により、距離 r 離れた位置での音圧 $P(r)$ は次式で与えられる(式(11)参照)。

$$|P(r)| = \left| \frac{j\omega\rho U}{4\pi r} e^{-jkr} \right| = \frac{\omega\rho}{4\pi r} \left| \frac{U}{I} \right| |I| \quad (24)$$

ゆえに、 M は

$$M = \left. \frac{E}{P} \right|_{I=0} = \frac{4\pi r}{\omega\rho} \left. \frac{P(r)}{I} \right|_{P=0} \quad (25)$$

となる。式(25)はマイクロホン感度が、マイクロホンをスピーカとして使ったときの、周波数、空気密度、距離(r)、入力電流、及び r 離れた位置での音圧で与えられることを示しており、“Schottky’s law of low-frequency reception”と呼ばれている[5]。この式と、以下に示す実験を行うことにより、電圧、電流(+周波数、空気密度、距離)の測定から感度が求められる。なお、このとき得られる感度は、自由音場にマイクロホンを置いたときに生じる電気出力と、マイクロホンを置かないときのその点における音圧との比であり、自由音場感度と言われる。

マイクロホン A の受波感度 M を求めるものとする。スピーカ C と相反性(可逆でも反可逆でもよい)を満たす変換器 B を用意し、図-3に示

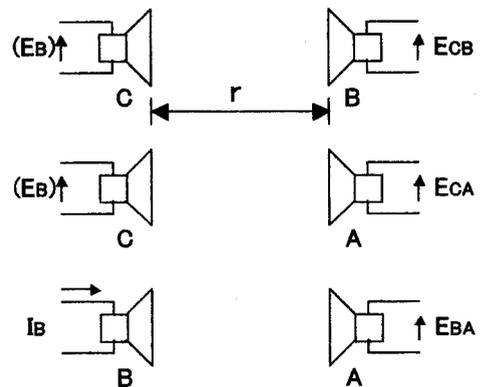


図-3 相互校正法の測定手順

すように、3回の実験を行う。

〔測定1〕 スピーカ C を ON して、 B の開放電気端子電圧 $|E_{CB}|$ を測定する。

〔測定2〕 変換器 B と A を置き換えて、 A の開放電気端子電圧 $|E_{CA}|$ を測定する。

上記の結果から、

$$\frac{|E_{CA}|}{|E_{CB}|} = \frac{M_A}{M_B} \quad (26)$$

を得る。

〔測定3〕 変換器 C を B に置き換えて、 B の入力電流 $|I_B|$ 及び A の開放電気端子電圧 $|E_{BA}|$ を測定する。このとき、マイクロホン A の位置における音圧は

$$|P_{BA}| = \frac{\omega \rho}{4\pi r} M_B |I_B| = \frac{|E_{BA}|}{M_A} \quad (27)$$

となる。式(26)と(27)から

$$M_A = \left(\frac{4\pi r}{\omega \rho} \right)^{1/2} \frac{|E_{CA}| |E_{BA}|}{|E_{CB}| |I_B|} \quad (28)$$

が得られる。

このように、電気測定と周波数、空気の密度及び距離から絶対感度が求められるので、精度の高いマイクロホン感度の校正が可能となる。マイクロホン A の受波感度が求められれば、変換器 B の送波及び受波感度が求められる。ここでは、自由音場を例にとって説明したが、実際の相互校正法では、カプラと呼ばれる小容積の容器を用いた「音圧感度」の校正が一般的である。

文献[1,2,8]等では、「同じ種類に属する三つの可逆変換器」を用いる校正法について述べているが、少なくとも一つだけ可逆性を満たす変換器を用いた相互校正法が文献[5,6,9,10]等で紹介され

ている。

7. ま と め

相反定理(相反性、可逆性)は、電気系、機械系、電気-機械(音響)系の広範な分野で成り立つ性質である。精密なマイクロホンの感度校正は、相反性に基づく相互校正法により行われるので、音響学にとっては欠かせない定理である。最初に述べたように、相反性は音響・振動の分野の多くの場面で実用されており、それが少しでも身近に感じられるよう本解説が役立てば幸いである。

謝 辞

産業技術総合研究所の佐藤宗純氏にはマイクロホンの相互校正法の肝要な部分を手直ししていただいたことに対して感謝いたします。

文 献

- [1] 早坂寿雄, 音響工学 (日刊協業新聞社, 東京, 1962).
- [2] 早坂寿雄, 技術者のための音響工学 (丸善, 東京, 1986).
- [3] S.P. Parker, et al., Eds., *Encyclopedia of Science & Technology* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1982).
- [4] 佐藤利三郎, 伝送回路 (コロナ社, 東京, 1963).
- [5] A.D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1981), p. 195.
- [6] L.E. Kinsler and A.R. Frey, *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley & Sons, Inc., 1962), p. 324.
- [7] 鈴木英男, “電気音響変換器の相反性について”, 音響学会誌, 55, 560 (1999).
- [8] 五十嵐寿一編, 音響と振動 (共立出版, 東京, 1968).
- [9] 二村忠元, 奥田襄介, 城戸健一, 曾根敏夫, 電気音響工学 II (オーム社, 東京, 1963).
- [10] 三井田淳郎, 音響工学 (昭晃堂, 東京, 1992).